Функции нескольких переменных.

§1. Основные понятия и определения.

Определение 1. Переменная величина **z** называется функцией двух переменных **x** и **y**, если:

1. задано множество D пар численных значений **x** и **y**;
2. задан закон, по которому каждой паре $(x;y)$ из этого множества соответствует единственное значение функции **z**.

$z = f(x;y)$

1). $z = f(x;y)$ - явная

2). F(x;y;z) = 0-неявная

3). $V_{цилиндра} = \pi r^2 h \Leftrightarrow V = V(r;\mathrm{h})$

4). $z = ax_1 + bx_2 \Leftrightarrow z = z(\mathrm{x}_1;\mathrm{x}_2)$ – доход предприятия, где

x_1 – количество 1-ой продукции,

x_2 – количество 2-ой продукции,

z –целевая функция

5). $u = f(x;y;z)$ – функция 3-х переменных

6). $z = f(x_1;x_2;...x_n)$ – функция n-переменных

Определение 2. Множество D всех пар значений аргументов **x** и **y** функций **z**, при которых функция существует, называется ***областью определения z.***

Определение 3. Множество E значений функции **z** называется ***областью изменения функции.***

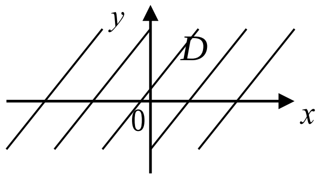
Областью определения может быть вся плоскость или её часть, ограниченная некоторыми линиями.

- Линию, ограничивающую область, называют ***границей области.***
- Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними.***
- Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой.***
- Область, с присоединенной к ней границей, называется ***замкнутой.***

Примеры: Найти области определения следующих функций:

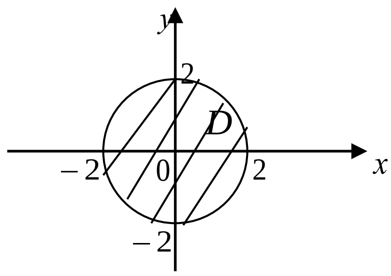
1) $z = x^2 + y^2$

$$D: \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$$



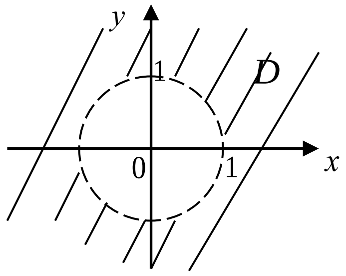
2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$$D: \quad \begin{matrix} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{matrix}$$

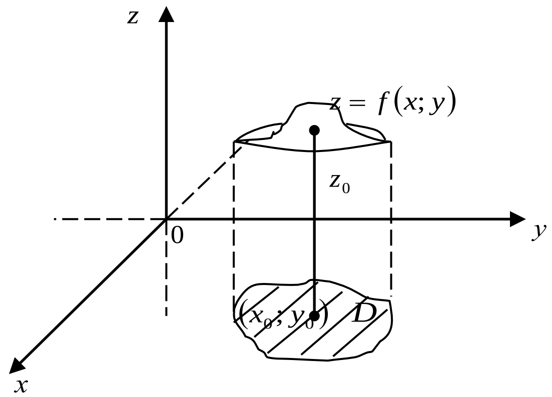


3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$

$$D: \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{matrix}$$



Определение 4. ***Графиком*** функции $z = f(x; y)$ называется множество точек в системе OXYZ, связанные зависимостью $z = f(x; y)$ (в общем случае это какая-то поверхность).



Замечание. Для функции трех и более переменных геометрической интерпретации не существует.

Пример. Методом сечений построить график функции $z = x^2 + y^2$

Метод сечений состоит в нахождении линий пересечения данной поверхности с координатными плоскостями.

1) Пусть $x=0$ (уравнение плоскости YOZ)

Тогда $z=y^2$ – парабола в плоскости YOZ

y	0	± 1	± 2
z	0	1	4

2) Пусть $y=0$ (уравнение плоскости XOZ)

$z=x^2$ – парабола в плоскости XOZ

y	0	± 1	± 2

z	0	1	4

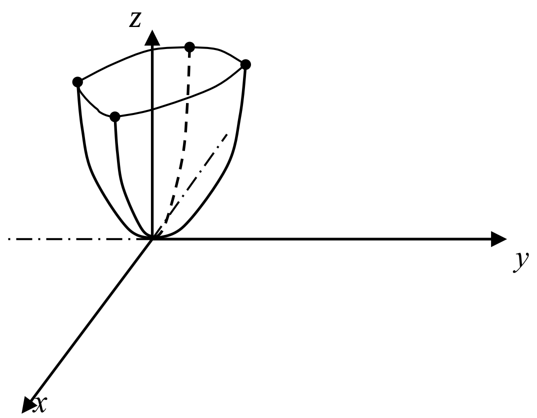
3) Пусть $z=0$ (уравнение плоскости XOY)

$x^2+y^2=0$ – окружность, вырожденная в точку с координатами (0;0).

Тогда пусть $z=4$ (плоскость || XOY)

$x^2+y^2=4$ – уравнение окружности в плоскости || XOY

С центром в точке С (0;0) и радиусом R=2



Название поверхности следует из линий пересечения плоскостей. Так как в двух сечениях этой поверхности были параболы, то поверхность – параболоид, а т.к. в третьем сечении - окружность, то параболоид вращения.

Замечание. Если в 3-м сечении будет эллипс, то поверхность носит название – эллиптический параболоид.

§2. Многомерные функции, используемые в экономике.

1. Многомерная **функция полезности** $U(x) = U(x_1,\dots,x_n)$ – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности U набора $X=(x_1,\dots,x_n)$ товаров. Функция неубывающая, т.е. $U(x_1) \le U(x_2)$, если $x_1 \le x_2$. Типичная функция полезности двух переменных $U(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}$
2. **Функция издержек** $I(y) = I(y_1, \dots, y_n)$ – зависимость издержек в стоимостной форме от объемов $Y=(y_1,\dots,y_n)$ выпускаемой продукции. Она также неубывающая.

3. В случае **n** переменных обобщается понятие **производственной функции** $y= F(x)=F(x_{1,\dots,}x_n)$, выражающей зависимость объема или стоимости (y) выпускаемой продукции от объема $X = (x_{1,\dots,}x_n)$ перерабатываемых ресурсов. Она также неубывающая.

Наиболее известной производственной функцией является **функция Кобба - Дугласа:**

$\boxed{z = b_0 x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}}$ (для простоты, мы предположили, что n=2)

где:

z - выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении (или величина общественного продукта)

$b_0; b_1; b_2$ - неотрицательные константы, причем $b_1 + b_2 \le 1$

x_1 – объем производственных фондов, либо в стоимостном, либо в натуральном выражении

x_2 – объем трудовых ресурсов (затраты труда) – число рабочих, число чел.- дней и т.п.

§3. Частные приращения и частные производные функции двух переменных $z = f(x; y)$

Понятие непрерывности функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ дается аналогично этому понятию для функции одной переменной.

Определение 1. Функция $z = f(x; y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0; y_0)$, если бесконечно малым приращениям Δx и Δy соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0}$$

Определение 2. Выражение $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$ называется полным приращением функции **z** (получено в результате приращения обоих аргументов).

Можно рассматривать частные приращения функции **z** при изменении только одного аргумента и фиксированном значении другого.

$\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y)$ - частное приращение функции **z** по **x**, причем

x- переменная

y- const.

Аналогично:

$\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y)$ - x- const

y- переменная

Определение 3. Частной производной функции $z = f(x;y)$ по переменной **x** называется предел отношения частного приращения **z** по **x** к приращению аргумента, при стремлении последнего к нулю.

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x^{'}}$$

Аналогично:

$$\boxed{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y^{'}}$$

- частная производная функции $z = f(x;y)$ по переменной y.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \to y = \text{const} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \to x = \text{const}$$

Все правила и формулы дифференцирования функции $y = f(x)$ справедливы и для функции многих переменных.

Пример. Найти частные производные функции

1. $z = x^2 + y^3 + 2x - 3y + 5$

$$\underset{y=\text{const}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = 2x + 0 + 2 - 0 + 0 = 2x + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = 0 + 3y^2 + 0 - 3 + 0 = 3y^2 - 3$$

2. $z = x^y$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = y \cdot x^{y-1} \quad ; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = x^y \cdot \ln x$$

Замечание. Частные производные функции $z = f\left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right)$ определяются также в предположении, что меняется только одна из n-независимых переменных, а остальные являются const.

Пример. $z = x_1^2 + x_1 \cdot x_2^2 + 3x_3$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_1}\right|_{\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\}\text{const}} = 2x_1 + x_2^2 \quad ; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x_2}\right|_{\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \end{matrix}\right\}\text{const}} = 2x_1 \cdot x_2 \quad ; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x_3}\right|_{\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\}\text{const}} = 3$$